
Rechnungsgrundlagen für die Pensionsversicherung AVÖ 1999 P

Franz Günter Liebmann

Einführung

Im Dezember 1999 wurden von der Aktuarvereinigung Österreichs die „Rechnungsgrundlagen für die Pensionsversicherung, AVÖ 1999 P“ herausgegeben.

Für die kommerzielle Verwendung dieser Rechnungsgrundlagen ist der Erwerb einer Lizenz beim österreichischen Förderungsverein der Versicherungsmathematik erforderlich (dies gilt sowohl für den 1. Teil (klassische Methode) als auch für den 2. Teil (kontinuierliche Methode). Nähere Informationen können dem Internet entnommen werden: http://www.avoe.at/inhalte/oe_index.html.

Im Teil 1 der Rechnungsgrundlagen wurde der klassische Ansatz zur Extrapolation der Sterbewahrscheinlichkeiten gewählt. Die Beobachtung der Entwicklung der Sterbewahrscheinlichkeiten legt eine über die Kalenderjahre exponentiell sinkende Entwicklung der Sterbewahrscheinlichkeiten nahe. Nach Berechnung und Ausgleichung dieser Entwicklung erhält man eine zweidimensionale Sterbetafel, welche zur Herleitung der Generationentafel verwendet wurde. Dieser Ansatz weicht nur unwesentlich von dem Extrapolationsmodell ab, welches zur Herleitung der Tafel AVÖ 1996 R für Rententarife verwendet wurde; siehe „Herleitung der Sterbetafel AVÖ 1996 R für Rentenver-

sicherungen“, S. Jörgen, F.G. Liebmann, F.W. Pagler und W. Schachermayer, Heft 9 der Mitteilungen der Aktuarvereinigung Österreichs und „Zur Anwendung der Tafeln EROM/F G 1950“, S. Jörgen, Heft 8 der Mitteilungen der Aktuarvereinigung Österreichs.

Die Tafel AVÖ 1996 R wurde für die Kalkulation von Rententarifen erstellt, sie enthält keine Rechnungsgrundlagen für Pensionszusagen, bei denen auch Leistungen im Invaliditätsfall vereinbart sind. Für solche Pensionszusagen können nun die Tafeln AVÖ 1999 P verwendet werden, die auf einer Ausscheideordnung für Aktive aufbaut und somit auch eine allfällige Invalidität berücksichtigen. Für die Bewertung von Witwen- bzw. Witwer-Renten wurden bei der Tafel AVÖ 1999 P weitere Sterbewahrscheinlichkeiten hergeleitet, d.h. die Rechnungsgrundlagen enthalten für Eigenrenten und Hinterbliebenenrenten jeweils zwei verschiedene Sterbetafeln.

Bei der zweiten Methode wurde das Differentialgleichungssystem, welches die Ausscheideordnung beschreibt, der Herleitung der Rechnungsgrundlagen zu Grunde gelegt. Der Vorteil dieser Methode ist, dass damit auch die gegenseitigen Abhängigkeiten der Übergangswahrscheinlichkeiten berücksichtigt werden. Dem steht der Nachteil gegenüber, dass die Übergangsintensitäten bestimmt werden müssen. Nach der Extrapolation der Sterbeintensitäten kann auch bei dieser Methode eine Generationentafel errechnet werden. Es zeigte sich, soweit die Ausscheidewahrscheinlichkeiten keine „großen“ Werte (etwa über 25 %) annehmen, dass die Auswirkungen der gegenseitigen Abhängigkeiten der Wahrscheinlichkeiten nicht allzu groß sind und daher bei der Anwendung vernachlässigt werden können.

Die Anwendung der Tafel AVÖ 1999 P setzt voraus, dass ein festes Pensionsantrittsalter vereinbart ist; d.h. es wurden für den Übergang in die Alterspension keine Wahrscheinlichkeiten verwendet. Alle anderen Übergangswahrscheinlichkeiten sind jedoch hinreichend klein, sodass die klassische und die kontinuierliche Methode zu sehr ähnlichen Resultaten führen.

Um die Frühpensionierungen zu berücksichtigen, mussten allerdings die Invaliditätswahrscheinlichkeiten in den Altern vor dem Pensionsantrittsalter stark angehoben werden.

Eine detaillierte Beschreibung der kontinuierlichen Methode ist im letzten Abschnitt dieses Beitrages „Herleitung der Rechnungsgrundlagen nach Teil 2 (kontinuierliche Methode)“ enthalten.

Ausblick

Bezieht man die weitere Ausscheideursache „Übergang in die Alterspension“ in die Herleitung der Rechnungsgrundlagen ein, so wird eine Übergangswahrscheinlichkeit wirksam, die bereits so große Werte annimmt, dass die Auswirkungen auf die anderen Übergangswahrscheinlichkeiten nicht mehr vernachlässigt werden können.

Bei Pensionszusagen ist meist ein „Regel-Pensionsantrittsalter“ vereinbart. Bei einem von diesem Alter abweichenden Pensionsantrittsalter ändert sich die Höhe der vereinbarten Pension durch Zu- bzw. Abschläge. Auf den ersten Blick ist dem variablen Pensionsantrittsalter somit ausreichend Rechnung getragen. Machen jedoch viele Aktive von einem, vom vereinbarten Alter abweichenden Pensionsantrittsalter gebrauch, so hat dies Auswirkungen auf die anderen Übergangswahrscheinlichkeiten, u. a. auch auf die Sterbewahrscheinlichkeiten der Aktiven.

Mit der kontinuierlichen Methode können diese Auswirkungen quantifiziert werden.

Insbesondere bei Prognoserechnungen von größeren Beständen von Aktiven sollte mit variablen Pensionsantrittsaltern gerechnet werden, wobei die Auswirkungen auf die anderen Übergangswahrscheinlichkeiten berücksichtigt werden müssen.

Dies hat den entscheidenden Vorteil, dass dann zwischen der Invalidität im engeren Sinne (also Invalidität ausschließlich wegen Unfall oder Krankheit) einerseits und dem Übertritt in die Alterspension (einschließlich von Frühpensionierungen) andererseits, unterschieden werden kann.

Derzeit wird im Rahmen eines Arbeitskreises der Aktuarvereinigung Österreichs an einer Erweiterung der Rechnungsgrundlagen AVÖ 1999 P gearbeitet. Erste Berechnungen zeigen, dass die Berücksichtigung von variablen Pensionsantrittsaltern eine Auswirkung auf die Sterbewahrscheinlichkeit der Aktiven hat, die einer Altersverschiebung von mehreren Jahren entspricht.

Information zu Teil 2 der Rechnungsgrundlagen AVÖ 1999-P

Teil 2 besteht aus:

Der Beschreibung der Herleitung der Generationentafel und der dafür berechneten Konstanten, mit einer Information zur Excel-Datei und

einer Diskette mit der MS-Excel (Version 5) Datei RG99Li10.xls vom 11. Dez. 1999

und der MS-Word (Word 97) Datei: RG-k-M10.doc vom 10. Dez. 2000.

In der Excel Datei werden auf Basis der hergeleiteten Konstanten die Rechnungsgrundlagen berechnet.

Hiefür sind die folgenden Parameter in dem Tabellenblatt "Parameter" zu wählen:

Hinweis: Keine der Zellen der Excel-Datei ist gesperrt! Vor Änderung von Zellen sollte daher eine Sicherungskopie angelegt werden.

Einfache Parametereingabe im Tabellenblatt „Parameter“:

Geschlecht in Zelle B2

Generation in Zelle B3

Personengruppe in Zelle B5

Werden die Grundwahrscheinlichkeiten für die Individualmethode verwendet, kann in Zelle B7 die Generation des Ehepartners eingegeben werden.

In der Excel-Tabelle werden die Grundwahrscheinlichkeiten durch Lösen des Differentialgleichungssystems berechnet und in dem Tabellenblatt "GrundW" angegeben:

G r u n d w a h r s c h e i n l i c h k e i t e n:

q^{aa} Sterbewahrscheinlichkeiten für Aktive

i Invalidisierungswahrscheinlichkeiten

q^i Sterbewahrscheinlichkeiten für Invalide

q^g Sterbewahrscheinlichkeiten für Gesamtbestand

q^r Sterbewahrscheinlichkeiten für Altersrentner

q^w Sterbewahrscheinlichkeiten für Ehepartner

Erweiterte Parametereingabe:

Unter Berücksichtigung der Hinweise in der Beschreibung der Herleitung der Tafeln können im Tabellenblatt "Parameter" in den Zellen E25 bis H30 für Männer und E36 bis H41 für Frauen der Excel-Datei die Parameter:

s für den Selektionsabschlag der Altersrentner

x_1 , v_{\min} , x_2 und v_{\max} für die Invalidisierungsintensitäten und

B für die Sterbeintensität der Invaliden

variiert werden und so an die Gegebenheiten eines Bestandes angepasst werden.

(Es empfiehlt sich die Grundeinstellungen vorher abzuspeichern.)

Die mit den angegebenen Parametern errechneten Invalidisierungsintensitäten wurden um einem Sicherheitszuschlag in der Höhe von 20 % erhöht, zur Berücksichtigung der Frühpension wurde dieser Sicherheitszuschlag vom Alter 50 bis zum Alter 60 mit exponentiellem Anstieg so erhöht, dass der Zuschlag für das Alter 60 einen Wert von 100 % annimmt; ab dem Alter 60 wurde der Zuschlag konstant mit 100 % festgelegt (siehe Tabellenblatt „Berechnungen“ Zellen K15 bis M251).

Empfehlung: Die Parameter innerhalb der Bandbreite der Grundeinstellungen der vier Personengruppen wählen.

Zur Beurteilung der Auswirkungen, entsprechend den Hinweisen in der Beschreibung der Herleitung, steht u. a. das Tabellenblatt „q,mü,L“ zur Verfügung.

K o n s t a n t e n:

Das Tabellenblatt "Konstanten" enthält die entsprechend der Beschreibung der Herleitung der Generationentafel berechneten Konstanten a, b, k, d, f, g, j und h .

Diese Werte können nach Vorliegen einer neuen Sterbetafel der Statistik Austria neu berechnet werden.

Weiters enthält dieses Tabellenblatt die Relation der Rentnersterblichkeit zur Gesamtsterblichkeit in den niedrigen und mittleren Altern, Zellen H20 bis I22 und die Relation der Aktivensterblichkeit zur Gesamtsterblichkeit, Zellen H26 bis I30 sowie die Relation der Witwen- bzw. Witwer-Sterblichkeit in Relation zur Gesamtsterblichkeit, Zellen H49 bis I51.

Herleitung der Rechnungsgrundlagen nach Teil 2 (kontinuierliche Methode)

Als Basis für die Berechnung der Rechnungsgrundlagen wurde eine Generationentafel für die österreichische Bevölkerung erstellt.

Die für Rechnungsgrundlagen für die Pensionsversicherung benötigten Sterbehäufigkeiten für Aktive, Altersrentner und Witwer (Witwen) wurden aus der Generationentafel abgeleitet.

Die Sterbehäufigkeiten der Altersrentner und in wesentlich höherem Ausmaß die Invalidisierungshäufigkeiten, hängen von der beobachteten Berufsgruppe und den wirtschaftlichen und sozialen Rahmenbedingungen ab. Für diese Häufigkeiten wurden daher Varianten ermittelt:

für „Arbeiter“ bzw. Berufsgruppen mit manueller Tätigkeit bei ungünstigen wirtschaftlichen und sozialen Rahmenbedingungen,

für „Angestellte mit hohen Invalidisierungshäufigkeiten“ bzw. Berufsgruppen mit geistiger Tätigkeit bei ungünstigen wirtschaftlichen und sozialen Rahmenbedingungen,

für „Arbeiter und Angestellte“, Berufsgruppen die aus Arbeitern und Angestellten bestehen,

für „Angestellte mit niedrigen Invalidisierungshäufigkeiten“ bei günstigen wirtschaftlichen und sozialen Rahmenbedingungen.

Die Sterbeintensität für Invalide wurde in Abhängigkeit von der Invalidisierungsintensität errechnet.

Für die Herleitung von Generationentafeln ist eine Projektion der Entwicklung der Sterblichkeit erforderlich. Häufig wird für die Projektion ein exponentielles Abnehmen der Sterbehäufigkeiten der einzelnen Alter angenommen. Man erhält damit für jedes einzelne Alter eine Kennzahl, welche das Abnehmen beschreibt. Da die Sterbehäufigkeiten in den einzelnen Altern jedoch unterschiedlich stark sinken, müssen diese Kennzahlen noch ausgeglichen werden. Dieses Verfahren liefert für die Projektion der Sterblichkeit der Gesamtbevölkerung gute Resultate. Will man für die Pensionsversicherung Generationentafeln herleiten, so sind die Projektionen auch für die Sterbehäufigkeiten der Rentner, der Aktiven, der Invaliden, sowie des Gesamtbestandes der Aktiven und Invaliden herzuleiten. Dabei ist zu beachten, dass zwischen diesen Sterbehäufigkeiten und der Invalidisierungshäufigkeit ein Zusammenhang besteht.

Zur Beschreibung des Zusammenhanges der Sterbehäufigkeiten und der Invalidisierungsintensität ist es nützlich, mit den Übergangsintensitäten zu rechnen, da das adäquate Mittel zur Beschreibung der veränderlichen Bestände das folgende Differentialgleichungssystem ist:

$$\frac{dL_x^a}{dx} = -\mu_x^a L_x^a - \nu_x L_x^a \quad \text{- Abgang wegen Tod - Abgang wegen Invalidität}$$

$$\frac{dL_x^i}{dx} = \nu_x L_x^a - \mu_x^i L_x^i \quad \text{Zugang wegen Invalidität + Abgang wegen Tod}$$

$$\frac{dV_x^a}{dx} = \mu_x^a L_x^a \quad \text{Zunahme der Anzahl der verstorbenen Aktiven}$$

$$\frac{dV_x^i}{dx} = \mu_x^i L_x^i \quad \text{Zunahme der Anzahl der verstorbenen Invaliden}$$

$$\frac{dR_x}{dx} = \nu_x L_x^a \quad \text{Zunahme der Anzahl der Invaliden}$$

Weiters ergibt sich noch folgender Zusammenhang zwischen den Sterbeintensitäten

$$\mu_x^g L_x^g = \mu_x^a L_x^a + \mu_x^i L_x^i$$

Die Sterbeintensität des Gesamtbestandes ist die gewichtete Summe der Sterbeintensitäten der Teilbestände.

Vorteile bei der Verwendung von Intensitäten (insbesondere bei den für Generationentafeln notwendigen Projektionen in die Zukunft):

- die Problematik der Ermittlung und Verwendung von absoluten Ausscheideraten fällt weg,
- sind alle bis auf eine der benötigten Intensitäten geschätzt, so lässt sich diese eine Intensität berechnen, wobei die, durch das Differentialgleichungssystem festgelegten Zusammenhänge zwischen den Intensitäten erhalten bleiben,
- die gegenseitige Beeinflussung der Ausscheideraten während des Beobachtungsintervalles entfällt,
- die Anpassung an die beobachteten Daten ist einfacher als bei Wahrscheinlichkeiten (die Funktionen der Intensitäten haben i.a. keine Wendepunkte),
- die Extrapolation über hohe Alter hinaus ergibt sich unmittelbar,
- bei Projektionen in die Zukunft sind keine nachträglichen Ausgleichsverfahren erforderlich.

Nachteile:

- die Intensitäten müssen auf Grund der Veränderung der Bestände berechnet werden,
- das Differentialgleichungssystem muss gelöst werden.

Bei dem in dieser Arbeit vorgeschlagenen Modell zur Herleitung von Generationentafeln für die Pensionsversicherung wurden die benötigten Sterbeintensitäten aus der Sterbeintensität der Gesamtbevölkerung abgeleitet. Bei der Herleitung der anderen Intensitäten wurde das oben erwähnte Differentialgleichungssystem beachtet; weiters wurde berücksichtigt, dass der gewichteten Summe der Sterbeintensitäten der Teilbestände, die Sterbeintensität des Gesamtbestandes entspricht.

Werden die genannten Sterbehäufigkeiten einzeln projiziert, so kann es dazu kommen, dass dieser Zusammenhang verloren geht, und dass es zu widersprüchlichen Entwicklungen kommt.

Die Herleitung der einzelnen Häufigkeiten

Betrachtet man die Zahl der Todesfälle in Österreich in den letzten 120 Jahren, so erkennt man eine sehr unterschiedliche Entwicklung bei den beiden Geschlechtern:

Die Verteilung der Todesfälle hat sich bei Frauen wesentlich rascher verändert, als bei Männern, was sich auch in der wesentlich stärker gestiegenen durchschnittlichen Lebenserwartung der Frauen widerspiegelt.

Die Berechnungen sind daher jedenfalls getrennt für Männer und Frauen durchzuführen.

Ermittlung der Generationentafel für Österreich

Sterbehäufigkeiten für hohe Alter (für den Altersbereich der Alterspensionisten)

Zunächst wurden die Sterbeintensitäten für die vom Österreichischen Statistischen Zentralamt veröffentlichten Sterbetafeln berechnet. Das Statistische Zentralamt hat insgesamt in zehn Perioden Sterbetafeln ermittelt (1865-1875, 1870-1880, 1901-1905, 1906-1910, 1930-1933, 1949-1951, 1959-1961, 1970-1972, 1980-1982 und zuletzt 1990-1992).

Für hohe Alter lassen sich die Sterbeintensitäten sehr gut durch eine Verteilung nach Gompertz approximieren.

Für jede der genannten Perioden wurden die Sterbeintensitäten für den Altersbereich der Alterspensionisten nach Gompertz approximiert:

$$\mu(x, P) = C_p \cdot m_p^x$$

Die Parameter C und m zeigen einen recht kontinuierlichen Verlauf.

Bei einer analogen Untersuchung - für die Alter 30 bis 105 - ergab sich ebenfalls ein sehr kontinuierlicher Verlauf dieser beiden Parameter (vgl. Liebmann, 1996)

Für die beobachteten Perioden nimmt C exponentiell ab.

Der Parameter m ist ein Maß für die Schiefe der Verteilung der Todesfälle:

mit wachsendem m wird die Verteilung immer schief, d.h. dass sich das Maximum der Verteilung zu höheren Altern verschiebt. Für die beobachteten Perioden ist m annähernd linear steigend.

Für die Berechnung der Generationentafel wurden nur die Sterbetafeln der letzten fünf Volkszählungen verwendet (1949/51, 1959/61, 1970/72, 1980/82 und 1990/92). Dabei wurde in zwei Schritten vorgegangen: zunächst wurden die Periodentafeln für alle Kalenderjahre berechnet, und daraus lassen sich dann - als „Diagonalen“ in dieser Tabelle – die Generationentafeln berechnen.

Für die Parameter C_p und m_p wurden für die Periodentafeln der genannten fünf Volkszählungen nach der "Methode der kleinsten Quadrate" Ausgleichsfunktionen berechnet.

Die Berechnungen bauen auf den Berechnungen für die Diplomarbeit von Herrn Andreas Uhl auf. In der Diplomarbeit wird auch auf die Unterschiede zur Momentenmethode eingegangen.

$$C_p = a_{Per} \cdot b_{Per}^P$$

$$m_p = k_{Per} \cdot P + d_{Per}$$

Männer	a = 3,6529994415419E+13	k = 1,7952897434560E-04
	b = 9,7970224977907E-01	d = 7,3802433298518E-01
Frauen	a = 1,4404561723713E+39	k = 5,3500487583731E-04
	b = 9,4995669992869E-01	d = 5,8059160221753E-02

Es ergeben sich folgende Residual-Quadratsummen:

	Parameter	Residual-Quadratsumme
Frauen	C	0,9165
	m	0,9154
Männer	C	0,6582
	m	0,6335

Auffallend sind die Abweichungen bei der Periodentafel 1970/72, die sich auch bei der Entwicklung der mittleren Lebenserwartung widerspiegeln.

Man erhält damit eine Tabelle mit der Periodensterblichkeit für alle Kalenderjahre in den Spalten. Die „Diagonalen“ in dieser Tabelle ergeben die Generationentafel. Die „Diagonalen“ wurden wieder nach der Methode der kleinsten Quadrate approximiert.

Hier ergibt sich eine sehr gute Anpassung, die Residual-Quadratsummen liegen hier auf sechs Dezimalen genau bei 1.

Somit erhält man schließlich für jeden Geburtsjahrgang zwei Parameter C_G und m_G , mit welchen die Sterbeintensität dieses Geburtsjahrganges sehr gut beschrieben wird:

$$\mu(x, G) = C_G \cdot m_G^x$$

$$\text{mit } C_G = a_{Gen} \cdot b_{Gen}^G$$

$$m_G = k_{Gen} \cdot G + d_{Gen}$$

Männer	a = 1,191821079777430E+13	k = 1,758726668430220E-04
	b = 9,798390719737220E-01	d = 7,486455556344960E-01
Frauen	a = 1,2599250960205300E+37	k = 5,0792733108805400E-04
	b = 9,5107772053884800E-01	d = 1,3006195090785600E-01

Die damit errechneten extrapolierten Sterbehäufigkeiten weichen nicht wesentlich von den Sterbetafeln, welche für die Sterbetafel AVÖ 1996R (Jörgen, Liebmann, Pagler und Schachermayer, 1997) berechnet wurden, ab.

Die Sterbehäufigkeiten für mittlere und niedrige Alter (für den Altersbereich der Aktiven)

Der Altersbereich der Aktiven wurde getrennt für niedrige und für mittlere Alter untersucht.

Für mittlere Alter wurden die Sterbeintensitäten wieder mit einer Exponentialfunktion approximiert. Zu diesem Zweck wurde das arithmetische Mittel der Logarithmen der Sterbeintensitäten der Alter 35 bis 45 für alle Sterbetafeln berechnet. Die Logarithmen der Sterbeintensitäten zeigen in diesem Bereich einen linearen Verlauf, weshalb die Bildung des arithmetischen Mittels vertretbar erscheint. Die so errechneten Mittelwerte der Sterbeintensitäten der 40-jährigen zeigen - in Abhängigkeit vom Geburtsjahrgang - einen exponentiell fallenden Verlauf. Man erhält so für jede Generation einen Richtwert für die Sterbeintensität der 40-jährigen.

$$\mu_{40}^o(G) = f \cdot g^G$$

Männer $f = 1,399128127734830E+11$ $g = 9,838733539633610E-01$

Frauen $f = 2,405569942712410E+16$ $g = 9,774547092795450E-01$

Die Exponentialfunktion nach Gompertz zur Approximation der Sterbeintensität der mittleren Alter wurde nun so gewählt, dass sie beim Alter 40 den errechneten Mittelwert aufweist und beim Pensionsantrittsalter den Wert, der für hohe Alter errechneten Sterbeintensität, annimmt.

Für niedrige Alter wurden die Sterbeintensitäten durch ein Polynom 2. Grades approximiert.

Die Sterbeintensitäten für niedrige Alter weisen i.a. ein Minimum auf (bei Männern ca. beim Alter 27 und bei Frauen ca. beim Alter 25). Die Sterbeintensität für 27-jährige Männer bzw. 25-jährige Frauen wurde - unter Berücksichtigung der Sterbeintensitäten der Alter 24 bis 30 bei Männern und 22 bis 28 bei Frauen - für alle Sterbetafeln berechnet. Auch diese Sterbeintensitäten weisen einen exponentiell fallenden Verlauf auf und konnten so extrapoliert werden.

$$\mu_{\min}(G) = j \cdot h^G$$

Männer $f = 2,531600940017350E+13$ $g = 9,810489663233830E-01$

Frauen $f = 5,122377705875750E+22$ $g = 9,698607754454660E-01$

Das Polynom wurde so bestimmt, dass es das Minimum der Sterbeintensität beschreibt, und beim Alter 37 den Wert der Sterbeintensität, der für mittlere Alter ermittelt wurde, annimmt.

Die Sterbehäufigkeiten für Altersrentner

Bei der Ermittlung der Sterbehäufigkeiten für Altersrentner ist der Selektionseffekt zu berücksichtigen (vgl. Jörgen, Liebmann, Pagler und Schachermayer, 1997 und Schmithals Bodo und Schütz Esther U., 1995).

Wie bei der Herleitung der Rententafel AVÖ 1996R wurde auch hier angenommen, dass dieser Selektionseffekt mit zunehmendem Alter abnimmt.

Die Sterbeintensität der Altersrentner wurde durch eine Exponentialfunktion so approximiert, dass beim Alter 65 der Selektionsabschlag voll wirksam ist, mit zunehmendem Alter abnimmt und bei den höchsten Altern verschwindet.

$$\mu_G^{(r)}(x) = s \cdot C_G \cdot m_G^{(r)x}$$

mit s = Selektionsfaktor

$$\text{und } m_G^{(r)} = \frac{m_G}{\omega^{-1}\sqrt{s}}$$

Der Selektionsfaktor wurde in Abhängigkeit von der Personengruppe so gewählt, dass sich für das Alter 65 folgende Selektionswirkung ergibt:

Sterbehäufigkeit der Altersrentner in Prozent der
Sterbehäufigkeit der Gesamtbevölkerung beim Alter 65 (für
Generation 1935)

	Arbeiter	Arbeiter + Angestellte	Angestellte
Männer	88 %	80 %	69 %
entspricht	$s = 0,78$	$s = 0,63$	$s = 0,46$
Frauen	86 %	81 %	73 %
entspricht	$s = 0,73$	$s = 0,64$	$s = 0,52$

Diese Relationen wurden entsprechend der, in dem Artikel von Jörgen und andere, 1997 dargestellten Selektionswirkung gewählt.

Für Alter unterhalb des Alters 65 wurde die gleiche Sterbeintensität, wie bei den Witwern bzw. Witwen angenommen.

Die Sterbehäufigkeiten der Witwer bzw. Witwen

In niedrigen Altern sind nur sehr wenig Todesfälle zu beobachten.

Nach der Todesfallstatistik 1998, Gestorbene nach Familienstand, ereigneten sich in den Altern 20 bis 40 bei rund der Hälfte der Alter keine Todesfälle von verwitweten Frauen, bei den anderen Altern hat sich meist nur ein Todesfall ereignet, nur in zwei Altern waren zwei Todesfälle und in einem Alter drei Todesfälle zu beobachten. Auch im Altersbereich 40 bis 50 waren nur sehr wenig Todesfälle von verwitweten Frauen zu beobachten: die Anzahl der Todesfälle schwankt in diesem Altersbereich zwischen 0 und 11. Bei Männern beobachtet man wegen der niedrigen Sterblichkeit der Frauen, noch deutlich weniger Todesfälle von verwitweten Männern. Das bedeutet, dass ein zusätzlicher Todesfall in diesen Altern bereits zu einer beträchtlichen Änderung der Sterbehäufigkeit führt. Für die Sterblichkeit der Witwen bzw. Witwer wurde daher in niedrigen und mittleren Jahren die Sterblichkeit der Gesamtbevölkerung verwendet, mit einem Übergang zur Sterblichkeit der Alterspensionisten beim Alter 65.

Eine Unterscheidung der Sterbehäufigkeiten für Witwer und für Alterspensionisten ab dem Altersbereich des Antritts der Alterspension erscheint nicht zweckmäßig. Unter anderem auch deshalb, da in manchen Fällen mehrere Pensionsansprüche zusammenfallen können, so dass dann die Barwerte der Pensionsansprüche für ein und dieselbe Person mit unterschiedlichen Sterbehäufigkeiten zu bewerten wären. Zudem müsste zur Bewertung der Pensionsteile für jede Person ermittelt und festgehalten werden, aus welchem Grund Anspruch auf den jeweiligen Teil der Pension besteht.

Bei der Ausscheideordnung nach Teil 1 werden unterschiedliche Sterbehäufigkeiten für die Alterspension und für die Witwer(n)pension angegeben.

Die Sterbehäufigkeiten der Aktiven

Die Sterblichkeit der Aktiven wurde aus der Sterblichkeit der Gesamtbevölkerung durch Abschlagsfaktoren errechnet.

Die Abschlagsfaktoren wurden aus der Relation der, in Liebmann 1974 angegebenen Sterbewahrscheinlichkeiten der Aktiven, zu den Sterbewahrscheinlichkeiten der Gesamtbevölkerung 1970/72 errechnet.

Abschlagsfaktoren Aktivensterblichkeit		
Alter	Männer	Frauen
x_{\min} (27 bei Männer, 25 bei Frauen)	88 %	86 %
37	79 %	84 %
65	50 %	52 %

Die Invalidisierungsintensitäten

Untersuchungen der Invalidisierungshäufigkeiten in Deutschland, der Schweiz und insbesondere in Österreich zeigen, dass diese Häufigkeiten eine (in Abhängigkeit vom Alter) exponentielle Entwicklung aufweisen.

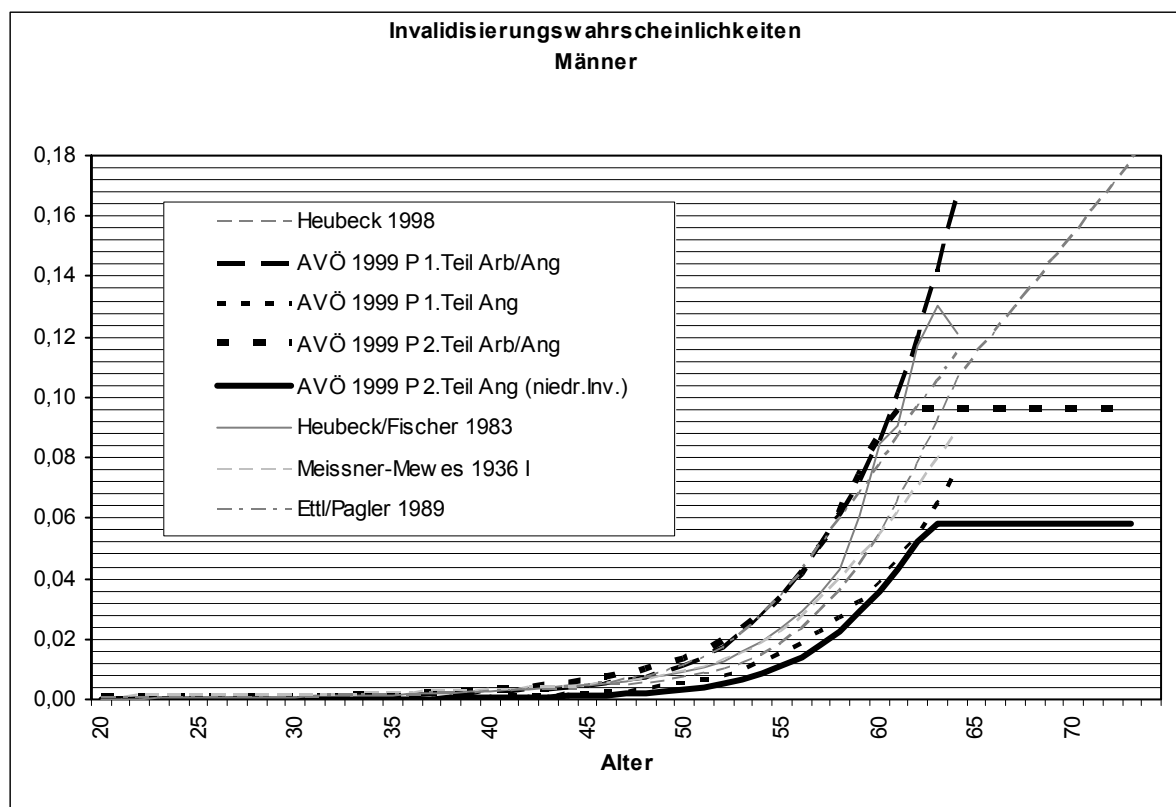
Bei den meisten Untersuchungen wird deutlich, dass die Invalidisierungshäufigkeiten in niedrigen Altern ein bestimmtes Minimum nicht unterschreiten.

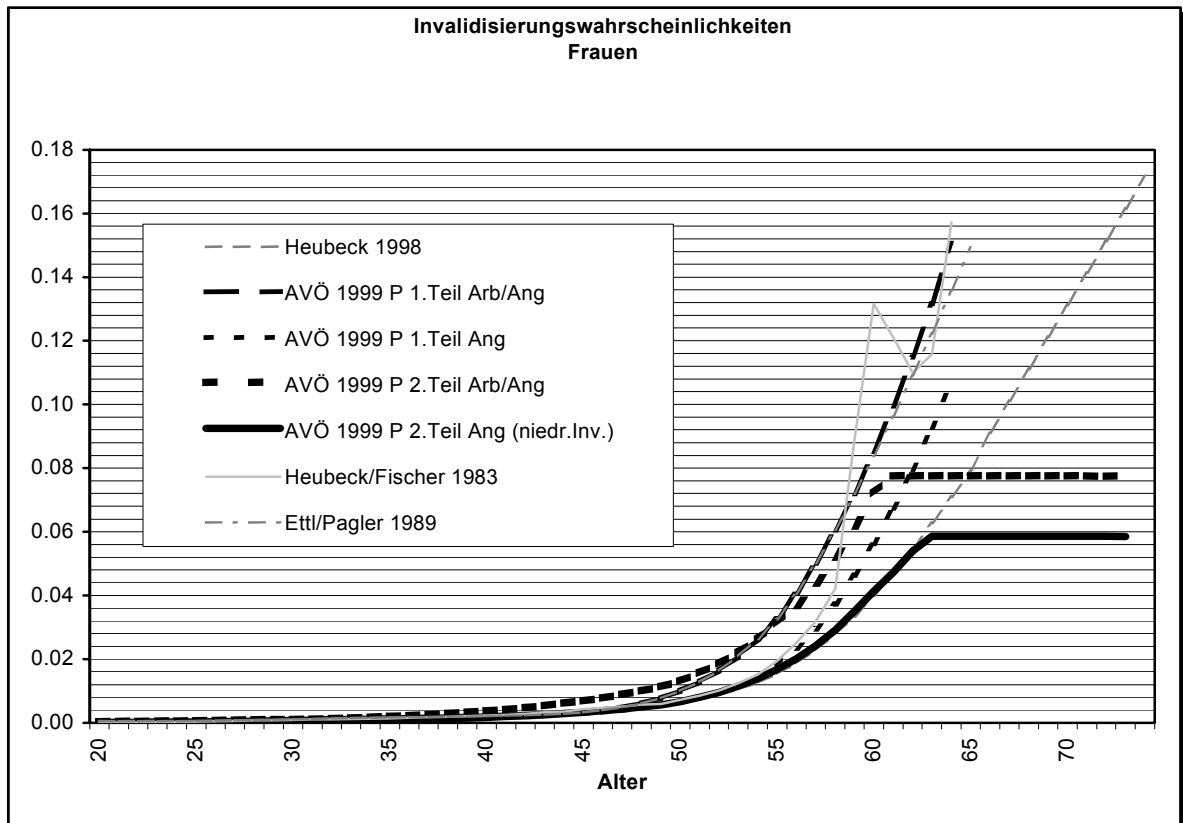
Bei den Altern kurz vor und nach dem Alter, ab dem ein Antritt der Alterspension möglich ist, zeigen die Untersuchungen sehr unterschiedliche Entwicklungen. In diesen Altern ist ein Antrag auf Invaliditätspension vor allem davon abhängig, ob ein Anspruch auf Alterspension besteht oder nicht. Es ist somit zunächst zu klären, ob die Berechnungen in Zusammenhang mit einer Alterspension durchzuführen sind, oder nur eine für reine Invaliditäts- bzw. Berufsunfähigkeitspension.

Die hier dargestellten Invalidisierungshäufigkeiten sind für den Fall ermittelt, dass gleichzeitig Anspruch auf Alterspension ab einem vorgegebenen Alter besteht.

Unter dieser Voraussetzung erscheint es plausibel, die Invalidisierungshäufigkeiten im Bereich der Alter, in denen i.a. Anspruch auf Alterspension besteht, konstant zu lassen.

Für die Rechnungsgrundlagen wurde angenommen, dass in der Regel spätestens ab dem Alter 63 ein Anspruch auf Alterspension besteht.





Sämtliche Invalidisierungshäufigkeiten liegen in einem Bereich, in dem sich die Häufigkeiten nur marginal von den Intensitäten unterscheiden. Daher konnte auch für die Invalidisierungsintensitäten eine gleiche Entwicklung angenommen werden.

Die Häufigkeit des Antritts der Invaliditäts- bzw. Berufsunfähigkeitspension hängt nicht nur vom Geschlecht, vom Alter und dem Berufsbild, sondern auch sehr stark von den jeweiligen wirtschaftlichen und sozialen Rahmenbedingungen ab (vgl. Heubeck, Fischer 1959). Bei den vorliegenden Rechnungsgrundlagen wurde versucht, diesem Umstand Rechnung zu tragen. Für Personengruppen mit bekannt unsicheren Arbeitsplatzbedingungen sollte mit einer hohen Invalidisierungshäufigkeit gerechnet werden.

Um die Unterschiede in den Invalidisierungsintensitäten zu berücksichtigen, wurden auf Basis der Statistiken des Hauptverbandes der österreichischen Sozialversicherungsträger vgl. Liebmann 1974, sowie aufgrund von Vergleichen mit deutschen und schweizerischen Tafeln, vier Varianten ermittelt. Auf Grund des zur Verfügung stehenden statistischen Materials wurde ein Mindest- und ein Höchstwert ermittelt und zwischen diesen beiden Werten eine exponentielle Entwicklung angenommen.

Invalidisierungsintensitäten v (ohne Berücksichtigung der Frühpension):

$$v(x) = \begin{cases} v_{\min} & \text{für } x \leq x_1 \\ C_v \cdot m_v^x & \\ v_{\max} & \text{für } x \geq x_2 \end{cases}$$

mit $m_v = \exp \frac{\log v_{\min} - \log v_{\max}}{x_1 - x_2}$

und $C_v = \log v_{\min} - x_1 \log m_v$

	Arbeiter	Arb.+Ang.	Ang. hohe Inv.	Ang. niedrige Inv.
Männer				
$x_1 =$	26	29	23	33
$v_{\min} =$	0,0008	0,0005	0,0002	0,0001
$x_2 =$	60	61	62	63
$v_{\max} =$	0,07	0,05	0,03	0,03
Frauen				
$x_1 =$	15	16	17	21
$v_{\min} =$	0,0002	0,00015	0,0001	0,0001
$x_2 =$	60	61	62	63
$v_{\max} =$	0,05	0,04	0,03	0,03

Bei Frauen sind die Unterschiede zwischen den einzelnen Berufsgruppen wesentlich geringer.

Für die Gruppe „Angestellte mit niedriger Invalidität“ wurde ein Mittelwert aus den Werten für Angestellte und Selbständige gewählt.

Die mit den angegebenen Parametern errechneten Invalidisierungsintensitäten wurden um einem Sicherheitszuschlag in der Höhe von 20 % erhöht, zur Berücksichtigung der Frühpension wurde dieser Sicherheitszuschlag vom Alter 50 bis zum Alter 60 mit exponentiellem Anstieg so erhöht, dass der Zuschlag für das Alter 60 einen Wert von 100 % annimmt; ab dem Alter 60 wurde der Zuschlag konstant mit 100 % festgelegt.

Die Sterbehäufigkeiten der Invaliden

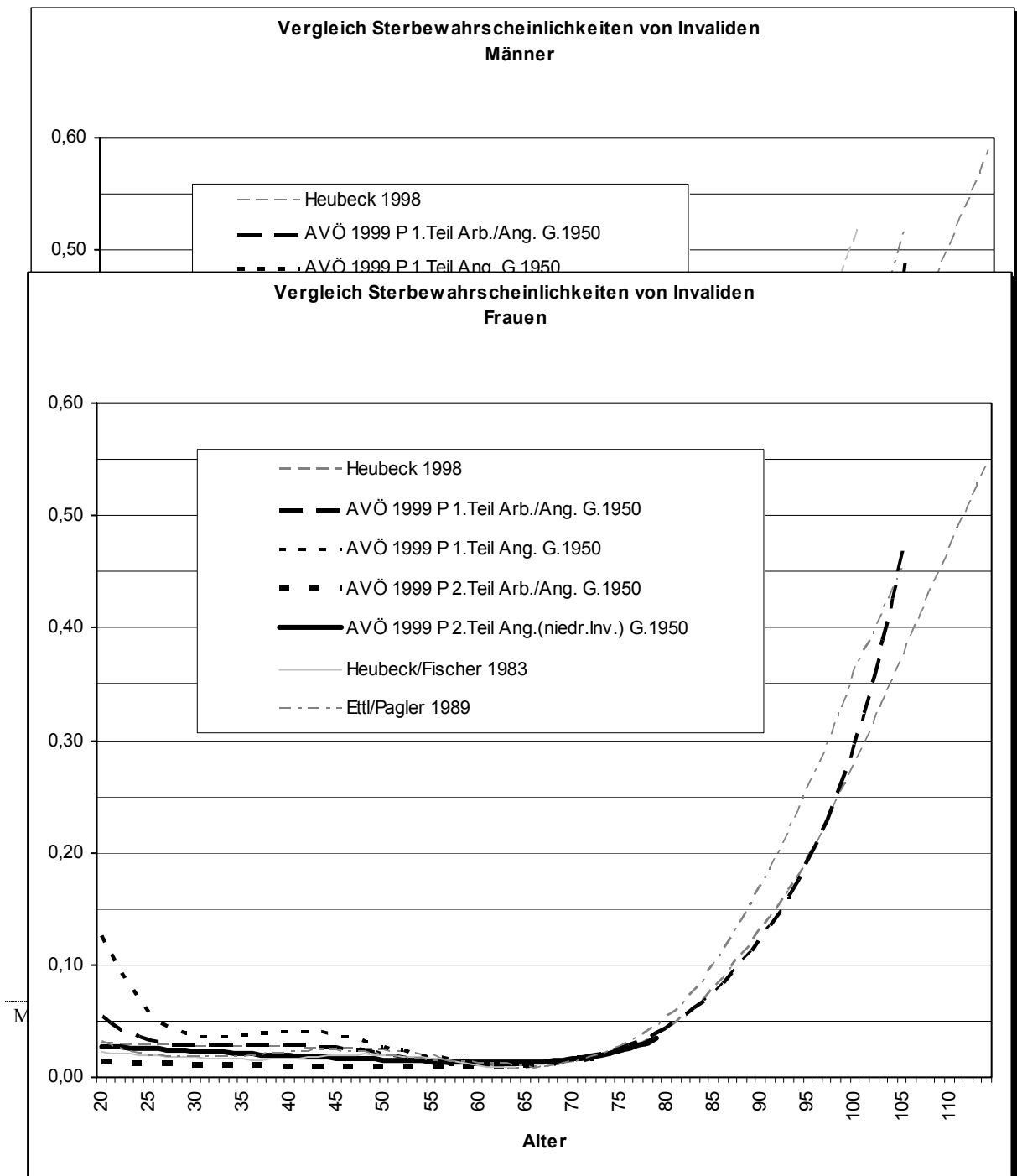
Zwischen den Invalidisierungshäufigkeiten und den Sterbehäufigkeiten der Invaliden besteht ein enger Zusammenhang.

Eine Bevölkerungsgruppe mit hohen Invalidisierungshäufigkeiten, welche stark auf wirtschaftliche Einflüsse zurückzuführen sind, wird eine niedrigere Sterbehäufigkeit der Invaliden aufweisen, als eine Bevölkerungsgruppe mit ebenfalls hohen Invalidisierungshäufigkeiten, welche jedoch auf Unfälle und Krankheiten zurückzuführen sind.

Zweifellos sind die Auswirkungen bei den einzelnen Bevölkerungsgruppen unterschiedlich, doch dürfte dieser Einfluss innerhalb der vielfachen Abhängigkeiten der Sterbehäufigkeiten der Invaliden nicht hinreichend genau zu ermitteln sein.

Die vielfache Abhängigkeit der Sterbehäufigkeiten ist auch der Grund, weshalb für diese Personengruppe so unterschiedliche Sterbehäufigkeiten angegeben werden (vgl. Meissner/Meewes, Heubeck/Fischer, Klaus Heubeck, Ettl/Pagler, Blätter der Deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik, Mitteilungen der Schweizerischen Vereinigung der Versicherungsmathematiker).

Wie auch bei den Witwer- bzw. Witwenpensionen erscheint auch bei den Invaliditätspensionisten eine Unterscheidung der Sterbehäufigkeiten ab dem Alter des Antritts der Alterspension nicht zweckmäßig (vgl. auch Vorwort zu den Rechnungsgrundlagen



Ettl/Pagler).

Da die vorliegenden Rechnungsgrundlagen zur Bewertung von Pensionszusagen auf Alterspension, mit eventuell zusätzlich vereinbartem Anspruch auf Invaliditätspension dienen sollen, ergibt sich, dass in diesem Zusammenhang den Sterbehäufigkeiten der Invaliden keine sehr große Bedeutung zukommt.

Aus den angeführten Gründen wurde die Sterbeintensität der Invaliden mit einer Verallgemeinerung des Ansatzes nach Gompertz/Makeham approximiert:

$$\mu_i(x, G) = B(x, G) + C_i(G) \cdot m_i(G)^x$$

Mit dem Makeham-Korrekturglied B kann die Zugehörigkeit zu einer Berufsgruppe mit einer bestimmten Invalidisierungshäufigkeit, berücksichtigt werden.

Für die Parameter C und m wurden in diesem Ansatz, die für die Gesamtbevölkerung errechneten Werte verwendet.

Insbesondere in der ersten Zeit nach Eintritt der Invalidität ist die Selektionswirkung von großer Bedeutung. Um dies zu berücksichtigen wurde angenommen, dass der Parameter B - entsprechend dem, bei den meisten Tafeln beobachteten Abklingen der Sterbeintensität - mit steigendem Alter linear fällt und beim Alter 80 verschwindet.

Der Ausgangswert von B für das Alter 20 wurde in Abhängigkeit von der, zur Berufsgruppe gewählten Invalidisierungsintensität so ermittelt, dass einerseits der Einfluss der Höhe der Invalidisierungsintensität berücksichtigt wurde, und zwar so, dass die Gesamtsterblichkeit der Berufsgruppe (der Aktiven und Invaliden zusammen), vor allem in den Altern zwischen 50 und 60 der Sterblichkeit der Gesamtbevölkerung entspricht. Der Zusammenhang der genannten Übergangsintensitäten ist durch das eingangs angegebene Differentialgleichungssystem gegeben.

Wert von B für Alter 20 und Geburtsjahr 1960

	Arbeiter	Arb.+Ang.	Ang. hohe Inv.	Ang. niedrige Inv.
Männer	0,015	0,032	0,07	0,145
Frauen	0,007	0,011	0,019	0,024

Um den Zusammenhang mit der Entwicklung der Gesamtbevölkerung zu wahren, wurde angenommen, dass auch B abnimmt. Da sich der Wert von B, vor allem während der Aktivzeit auf die Sterbeintensität der Invaliden auswirkt, wurde angenommen, dass B im gleichen Maß abnimmt wie die Sterblichkeit der 40-jährigen.

Berechnung der Übergangshäufigkeiten:

Der Zusammenhang der angeführten Übergangsintensitäten ist durch das angeführte

Differentialgleichungssystem gegeben. Die Berechnung der Übergangshäufigkeiten ergibt sich durch Lösen des Differentialgleichungssystems. Man erhält damit eine komplette Ausscheideordnung, bei der die Zusammenhänge zwischen den einzelnen Übergangshäufigkeiten und der Bezug zu der Gesamtsterblichkeit, während des gesamten Prognosezeitraumes erhalten bleibt.

Die Berechnungen wurden mit der Excel-Datei (Version 5) RG99Li10.xls durchgeführt.

Werden in der Datei die Parameter „Personengruppe“, „Geschlecht“ und „Geburtsjahr“ gewählt, so berechnet die Excel-Datei die komplette Ausscheideordnung für diese Parameter.

Unterschiede zu den Ausscheidhäufigkeiten nach Teil 1:

Unterschiede ergeben sich zum Teil auf Grund der unterschiedlichen Projektionen in die Zukunft und zum Teil auf Grund der unterschiedlichen Berechnungsmethode.

Die angegebenen Werte beziehen sich auf die Personengruppe Arbeiter und Angestellte.

Zunächst die Unterschiede, die auf die unterschiedliche Ausgleichung und Projektion zurückzuführen sind.

Sterbehäufigkeiten für die Alterspension:

Für einen derzeit bestehenden Bestand ergeben sich bei Männern nur geringe Unterschiede, bei Frauen ergeben sich nach dem hier beschriebenen Modell niedrigere Sterbewahrscheinlichkeiten.

Bei einer Betrachtung eines zukünftigen Bestandes zeigen sich trotz der verschiedenen Modelle eher geringe Unterschiede.

Bei Männern ergibt das hier beschriebene Modell eine etwas geringere zukünftige Abnahme der Sterblichkeit.

Bei Männern liegen die Sterbehäufigkeiten für die Generation 1920 ungefähr gleich hoch, für die Generationen 1940 und 1960 über jenen nach Teil 1.

Bei Frauen liegen die Sterbehäufigkeiten unter jenen nach Teil 1, wobei die Differenz bei jüngeren Generationen abnimmt.

Größere Unterschiede ergeben sich auf Grund der unterschiedlichen Annahmen bei der Sterblichkeit der Witwen bzw. Witwer

Die Unterschiede auf Grund der verschiedenen Berechnungsmethoden sind etwas größer, und wirken sich in erster Linie auf die Sterbehäufigkeiten der Invaliden aus.

Die Häufigkeiten, die nach Teil 1 berechnet wurden, richten sich mehr nach den beobachteten Werten, das hier beschriebene Modell orientiert sich mehr an den Zusammenhängen zwischen den Ausscheidungshäufigkeiten und an der Bevölkerungssterblichkeit.

Errechnet man die Gesamtsterblichkeit der Personengruppen, d.h. die Sterblichkeit der Personengruppe, bei der die Aktiven und Invaliden zu einer Personengruppe zusammengefasst werden, so liegen die, nach diesem Modell berechneten Sterbehäufigkeiten, näher an der Sterblichkeit der Gesamtbevölkerung.

Beiden Modellen gemeinsam ist, dass die grundlegenden Zusammenhänge erhalten bleiben.

Zum Beispiel besteht ein Zusammenhang zwischen Invalidisierungshäufigkeit und Sterbehäufigkeit der Invaliden:

je niedriger die Invalidisierungshäufigkeiten einer Personengruppe sind, desto höher sind die Sterbehäufigkeiten der Invaliden dieser Personengruppe.

Aus den angegebenen Unterschieden bei den Ausscheidungshäufigkeiten ergeben sich folgende

Unterschiede bei den Barwerten und Anwartschaften nach Teil 1 und Teil 2 (Rechnungszinsfuß von 3 %):

bei Männern:

bei Beständen im Jahr 2000:

Nach **Teil 2 rund 1½ % bis 2 % niedrigere Anwartschaften** der Aktiven als nach Teil 1

etwa gleich hohe Barwerte der Altersrenten

bei Beständen im Jahr 2010:

Nach Teil 2 im Durchschnitt um **3½% niedrigere Anwartschaften** der Aktiven als nach Teil 1

Nach Teil 2 rund 0 % bis 3½ % niedrigere Barwerte der Altersrenten als nach Teil 1

Bei noch weiter in der Zukunft liegenden Beständen vergrößern sich die Unterschiede; auf Grund der geringeren Abnahme der Sterblichkeit liegen die Barwerte und Anwartschaften dann noch etwas stärker unter jenen, die nach Teil 1 berechnet werden.

bei Frauen:

bei Beständen im Jahr 2000:

Nach Teil 2 rund ½ % bis 3½ % höhere Anwartschaften der Aktiven als nach Teil 1

Nach Teil 2 rund 1 % bis 5 % höhere Barwerte der Altersrenten als nach Teil 1

Für weiter in der Zukunft liegende Bestände vermindert sich der Unterschied auf Grund der etwas geringeren Abnahme der Sterblichkeit.

Literatur

- Artmann Hans und Pfaffenberger Ernst, 1907: "Zur Mathematik der Pensionsversicherung", Verlag von Gustav Fischer, Jena
- Bomsdorf Eckart, 1993: "Generationensterbetafel Geburtsjahrgang 1987 und Periodensterbetafel 1986/88", Blätter der Deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik, Band XXI, Heft 2
- Böhmer P. E., 1914: "Die Grundlagen der Theorie der Invaliditätsversicherung", Jahrbuch der Versicherungsmathematik 1914, Verlag: Deutsche Versicherungs-Presse, Berlin
- Bowers Newton L., Gerber Hans U., Hickman James C., Jones Donald A., Nesbitt Cecil J., 1986: "Actuarial Mathematics" The Society of Actuaries, U.S.A:
- Chuard Marc et Chuard Philippe, 1992: "La réactivité des invalides dans les rentes futures d'invalidité", Mitteilungen der Schweizerischen Versicherungsmathematiker, Heft 1, 1992
- Chuard Philippe, 1993: "Modèles mathématiques pour actifs et invalides", Mitteilungen der Schweizerischen Versicherungsmathematiker, Heft 2, 1993
- Ettl, Pagler 1989: "Rechnungsgrundlagen für die Pensionsversicherung", Verlag: Verband der wissenschaftlichen Gesellschaften Österreichs, Wien
- Gerber Hans U., 1995: "Life Insurance Mathematics", Springer Verlag, Swiss Association of Actuaries Zürich
- Edmund Halley: 1693 "An Estimate of the Degrees of the Mortality o Mankind, Drawn from Varios Tables of Birth and Funerals at the City of Breslau"
- Heubeck Georg, Fischer Kurt 1959: Richttafeln für die Pensionsversicherung, René Fischer Verlag, Weissenburg/Bayern
- Heubeck Klaus 1983: "Richttafeln", Verlag: Heubeck-Richttafeln-GmbH, Köln
- Heubeck Klaus 1998: "Richttafeln 1998", Verlag Heubeck-Richttafeln-GmbH, Köln
- Jörgen, 1996: "Zur Anwendung der Tafeln EROM/F G 1950", Mitteilungen der Aktuarvereinigung Österreichs, Heft 8, März 1996
- Jörgen, Liebmann, Pagler und Schachermayer, 1997: "Herleitung der Sterbetafel AVÖ 1996R für Rentenversicherungen", Mitteilungen der Aktuarvereinigung Österreichs, Heft 9, November 1997
- Karup Johannes Karup, 1875: "Die neue Theorie der Invaliditäts- und Activitätsberechnung" Rundschau der Versicherungen, Verlag der Rundschau-Expedition, Leipzig, London
- Kolster Nils, Loebus Horst und Mörtlbauer Werner, 1998: "Neue Rechnungsgrundlagen für die Berufsunfähigkeitsversicherung DAV 1997", Blätter der Deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik, Band XXIII, Heft 4

- Lambrechts Kurt, 1996: "Belgische Sterftetafels: van vorige tot volgende eeuw (Belgian mortality table: from last till next century)", faculteit economischen en toegepaste economische wetenschappen, katholieke universiteit Leuven
- Lexis W., 1877: "Zur Theorie der Massenerscheinungen in der menschlichen Gesellschaft" Fr. Wagner'sche Buchhandlung Freiburg i.B.
- Liebmann F.G., 1974: "Demographische Entwicklung der Versichertenbestände bis 1990", Schriftenreihe des Forschungsinstitutes für Soziale Sicherheit beim Hauptverband der österreichischen Sozialversicherungsträger, Heft 1, 1974
- Liebmann F.G., 1989: "Ein kontinuierliches Modell in der Pensionsversicherungsmathematik", Mitteilungen der Schweizerischen Versicherungsmathematiker, Heft 1, 1989
- Liebmann F.G., 1996: "Extrapolation von Sterbetafeln für die Pensionsversicherung", Mitteilungen der Aktuarvereinigung Österreichs, Heft 8, März 1996
- Liebmann F.G., 1999: "Generationentafel für die Pensionsversicherung aufbauend auf einer Ausscheideordnung mit mehreren Ausscheideursachen", Blätter der Deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik, Band XXIV, Heft 2
- Lindmayr Bernhard und Musger Hans, 1977: "Tabellen zur Berechnung von Rückstellungen für Pensionsverpflichtungen nach der österreichischen allgemeinen Sterbetafel 1970/72", Selbstverlag der Verfasser, 8101 Gratkorn, Am Hartboden 477
- Loebus Horst, 1994: "Bestimmung einer angemessenen Sterbetafel für Lebensversicherungen", Blätter der Deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik, Band XXI, Heft 4
- Maeder Philipe, 1995: "La construction des tables de mortalité du tarif collectif 1995 de l'UPAV" Mitteilungen der Schweizerischen Versicherungsmathematiker, Heft 2, 1995
- Masciotti Rudolfo, 1963: "La matematica attuarielle analytique", Selbstverlag des Verfassers, Via Trionfale 85, Roma, Italien
- Meewes Walter und Meissner Walter, 1936: "Rechnungsgrundlagen für Pensionsversicherung" Verlag Neumanns Zeitschrift für Versicherungswesen, Berlin, 1936
- Milbrodt Hartmut und Helbig Manfred, "Mathematische Methoden der Personenversicherung", erscheint voraussichtlich 1999 im Verlag Walter de Gruyter, Berlin
- Müller Nikollaus E., 1973: "Mathematik der Pensionsversicherung", Verfasser-Verlag, Baldham, Alte Poststr. 6 A, Deutschland
- Neuburger Edgar, 1974: "Notiz über einen rechnerangepassten Algorithmus zu Berechnung von Prämien und Reserven" Blätter der Deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik, Band XI, Heft 4

Neuburger Edgar, 1990: "Unabhängigkeit von Rentenanwartschaftsbarwerten von der Zahlungsweise" Blätter der Deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik, Band XIX, Heft 3

Neuburger Edgar, 1993: "Mathematik und Technik betrieblicher Pensionszusagen" Deutsche Gesellschaft für Versicherungsmathematik, Schriftenreihe Angewandte Versicherungsmathematik, Heft 25

Neuburger Edgar, 1999: "Bemerkungen zum Formelwerk der Richttafeln 1998" Blätter der Deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik, Band XXIV, Heft 1

Nöbauer Wilfried und Timischl Werner: "Mathematische Modelle in der Biologie"
ISBN 3-528-03068-2

Oster Günter, 1998: „Entwicklungen und Trends in der Berufsunfähigkeits-Zusatzversicherung in Deutschland, Österreich und der Schweiz“ Dissertation an der Leopold-Franzens-Universität Innsbruck

Peter Heinrich und Trippel Johann R., 1993: "Auswertungen und Vergleich der Sterblichkeit bei den Einzelkapitalversicherungen der Schweizerischen Lebensversicherungs- und Rentenanstalt in den Jahren 1981- 1990, Mitteilungen der Schweizerischen Versicherungsmathematiker, Heft 1 1993

Reichel Georg: "Gibt es "unabhängige" Verbleibswahrscheinlichkeiten in der Pensionsversicherungsmathematik? Blätter der deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik, Oktober 1983

Schaaf Bettina, Heller Ursula und Papst Werner, 1996: "Auswirkungen der neuen Rechnungsgrundlagen für Rentenversicherung und Bewertung", Blätter der Deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik, Band XXII, Heft 4

Schaertlin G., 1907: "Zur mathematischen Theorie der Invaliditätsversicherung" Bern, Schweizerische Lebensversicherungs- und Rentenanstalt

Schmithals Bodo und Schütz Esther U., 1995: "Herleitung der DAV-Sterbetafel 1994 R für Rentenversicherungen", Blätter der Deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik, Band XXII, Heft 1

Winnacker und Küchler: "Chemische Technologie" 1984

Wüthrich Marcel, 1996: "Herleitung von Austrittswahrscheinlichkeiten aus Vorsorgeeinrichtungen" Mitteilungen der Schweizerischen Versicherungsmathematiker, Heft 2, 1996